

# Van der Pol-Duffing 单边约束系统的随机响应\*

苏敏邦, 戎海武

(佛山科学技术学院数学系, 广东 佛山 528000)

**摘要:** 研究了 Van der Pol-Duffing 单边约束系统在谐和与随机噪声联合激励下的响应问题。用多尺度法分离了系统的快变项, 讨论了系统的阻尼项、非线性项和随机项等参数对系统响应的影响。在一定条件下, 当约束距离较大时对应于不同的初始条件, 系统具有两个非碰撞的稳态响应; 而当约束距离不大时, 对应于不同的初始条件, 系统也可以有两个不同的稳态响应, 其中一个是发生碰撞的响应, 而另外一个则不发生碰撞。随机扰动可以使得系统的响应从一个极限环变为一扩散的极限环。数值模拟表明本文提出的方法是有效的。

**关键词:** Van der Pol-Duffing 单边约束系统; 随机响应; 多尺度法

**中图分类号:** O324 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579(2009)02-0020-07

## Response of Van Der Pol-Duffing One-sided Constraint Oscillator to Combined Deterministic Harmonic and Random Excitation

SU Minbang, RONG Haiwu,

(Department of Mathematics, Foshan University, Foshan 528000, China)

**Abstract:** The resonance of single-degree-of-freedom Van der Pol-Duffing oscillator impact oscillator to combined deterministic and random excitation is investigated. The method of multiple scales is used to determine the equations of modulation of amplitude and phase. The effects of damping, detuning, bandwidth, and magnitudes of random excitations are analyzed. The theoretical analyses are verified by numerical results. Theoretical analyses and numerical simulations show that the intensity of the random excitation increase, the nontrivial steady state solution may change form a limit cycle to a diffused limit cycle. Under some conditions the system may have two steady state responses, one is a non-impact response, and another is an impact one.

**Key words:** Van der Pol-Duffing one-sided constraint system; random responses; multiple scale method

在实际工程动力学中往往存在大量碰撞, 冲击和干摩擦等非光滑因素, 其中重要的一种是由约束条件决定的<sup>[1]</sup>。目前, 用于描述碰撞过程的模型主要有三种<sup>[2]</sup>: 瞬态冲击模型, 分段线性模型和碰撞中局部变形的模型。由于这些模型向量场的不可微性, 导致系统呈现非光滑的特性, 可以产生丰富的动力学行为, 因此引起了学者们的广泛关注。而在实际中, 这种非光滑系统总是或多或少的受到随机噪声的影响, 因而研究在随机噪声激励下非光

滑系统的响应<sup>[3-5]</sup>具有理论意义和实际应用价值。总的说来, 关于非光滑系统特别是碰撞系统在随机激励下系统响应的分析的研究处于起步阶段, 本文将在这方面作一尝试。本文研究了 Van der Pol-Duffing 单边约束系统在谐和与随机噪声联合激励下的响应问题。采用瞬时冲击模型, 即假设冲击时间为零, 碰撞过程只考虑能量的损失, 碰撞前后的速度变化用恢复系数来描述。

\* 收稿日期: 2008-05-15

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10772046); 广东省自然科学基金资助项目(7010407)

作者简介: 苏敏邦(1957年生), 男, 讲师; E-mail: sumb@21cn.com

## 1 模型的提出及理论分析

考虑同时受谐和与随机噪声激励的单自由度 Van der Pol-Duffing 单边约束系统

$$\begin{cases} \ddot{x} + \varepsilon\beta\dot{x} + x + \varepsilon\alpha_1x^3 + \varepsilon\alpha_2x^2x = \\ \varepsilon h(\cos \omega t + \xi(t)), x < \Delta \\ \dot{x}_+ = -e\dot{x}_-, x = \Delta \end{cases} \quad (1)$$

其中  $0 < \varepsilon \ll 1$  为小参数,  $\beta$  为系统的阻尼系数,  $\alpha_1, \alpha_2$  代表系统的非线性强度,  $h > 0$  是定性谐和激励的强度,  $\omega$  为激励的中心频率,  $e$  是碰撞恢复系数,  $0 < e \leq 1$ ,  $\Delta$  为约束距离,  $-$ 、 $+$  分别表示碰撞前后时刻。 $\xi(t)$  是随机白噪声, 其相关函数为

$$R_\xi(\tau) = 2\pi S_0 \delta(\tau) \quad (2)$$

式中,  $\delta(\tau)$  为 Dirac  $\delta$  函数,  $S_0$  为  $\xi(t)$  的谱密度常数, 本文考虑  $S_0$  较小时的情形。当系统不存在碰撞时, 类似的模型由 Rajan 和 Davies, Nayfeh 和 Serhan, 以及戎海武等<sup>[6-9]</sup> 讨论过。但当系统存在碰撞时, 尚未见到研究。

### 1.1 $\Delta$ 较大时系统的响应

先考虑简单的情形, 设约束距离  $\Delta$  充分大, 即在稳态运动时系统不发生碰撞, 此时方程 (1) 变为

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \varepsilon\beta\dot{x} + x + \varepsilon\alpha_1x^3 + \varepsilon\alpha_2x^2x = \\ \varepsilon h(\cos \omega t + \xi(t)) \end{aligned} \quad (3)$$

我们用多尺度法<sup>[10]</sup> 研究系统 (3) 的主共振响应, 多尺度法已广泛应用于确定性系统中, 近些年来在随机系统中也有一些应用。引入调谐参数  $\sigma$ ,  $\omega = 1 + \varepsilon\sigma$ , 设系统 (3) 具有如下形式的解

$$x(T, \varepsilon) = x_0(T_0, T_1) + \varepsilon x_1(T_0, T_1) + \dots \quad (4)$$

式中  $T_0 = T, T_1 = \varepsilon T$  分别是快、慢时间尺度。记  $D_0 = \partial/\partial T_0, D_1 = \partial/\partial T_1$ , 则有:

$$\begin{aligned} d/dt &= D_0 + \varepsilon D_1 + \dots \\ d^2/dt^2 &= D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \dots \end{aligned} \quad (5)$$

将 (4) - (5) 两式代入 (3) 式, 并比较方程两边  $\varepsilon$  同次幂的系数可得下列微分方程组:

$$D_0^2 x_0 + x_0 = 0 \quad (6)$$

$$\begin{aligned} D_0^2 x_1 + x_1 = -2D_0 D_1 x_0 - \beta D_0 v_0 - \alpha_1 x_0^3 - \\ \alpha_2 (D_0 x_0)^2 x_0 + h \cos \omega t + \xi(t) \end{aligned} \quad (7)$$

方程 (6) 的解为

$$x_0(T_0, T_1) = a \cos(T_0 + \varphi) \quad (8)$$

式中  $a = a(T_1), \varphi = \varphi(T_1)$  分别是随时间缓变的系统响应的振幅和相角。将 (8) 式代入 (7) 式并消除奇异项可得:

$$\begin{cases} a' = -\frac{\beta}{2}a + \frac{h}{2}\sin \gamma + \xi_1(T_1) \\ a\gamma' = \sigma a - \frac{3}{8}a^3 - \frac{h}{2}\cos \gamma + \xi_2(T_1) \end{cases} \quad (9)$$

其中  $\gamma = \sigma T_0 - \varphi, -\alpha = \alpha_1 + \frac{1}{3}\alpha_2$ ,  $a'$  表示  $a$  关于  $T_1$  的导数,

$$\begin{aligned} \xi_1(T_1) &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \xi(T_1) \cos \psi d\psi \\ \xi_2(T_1) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \xi(T_1) \sin \psi d\psi \end{aligned} \quad (10)$$

其中  $\psi = \omega t - \gamma$ 。由 (9) 式解出  $a$  和  $\gamma$  后, 可得方程 (1) 的首次近似解为

$$x(t) = a(\varepsilon T_0) \cos(\omega t - \gamma(\varepsilon T_0)) + O(\varepsilon) \quad (11)$$

一般说来, 方程 (9) 很难精确求解, 只能求出近似解。由于随机扰动  $\xi(t)$  与确定性谐和激励  $h \cos \omega t$  相比较小, 所以首先讨论  $S_0 = 0 (\xi_1 = 0, \xi_2 = 0)$  即没有随机扰动时系统 (9) 的稳态响应。此时系统 (9) 可改写为

$$\begin{cases} a' = -\frac{\beta}{2}a + \frac{h}{2}\sin \gamma \\ a\gamma' = \sigma a - \frac{3}{8}a^3 - \frac{h}{2}\cos \gamma \end{cases} \quad (12)$$

对于稳态解  $a = a_0, \gamma = \gamma_0$  有  $a' = 0, \gamma' = 0$ , 由 (12) 式可得

$$\begin{cases} \frac{\beta}{2}a_0 = \frac{h}{2}\sin \gamma_0 \\ \sigma a_0 - \frac{3}{8}a_0^3 = \frac{h}{2}\cos \gamma_0 \end{cases} \quad (13)$$

将 (13) 式两边平方相加, 可得系统 (12) 的稳态响应的频率曲线为

$$\left[ \frac{\beta^2}{4} + \left( \sigma - \frac{3}{8}\alpha a_0^2 \right)^2 \right] a_0^2 = \frac{h^2}{4} \quad (14)$$

由弗洛凯理论知<sup>[11]</sup>, 由 (13) 式定义的周期解稳定的充分必要条件是

$$\left( \frac{3}{8}\alpha a_0^2 - \sigma \right) \left( \frac{9}{8}\alpha a_0^2 - \sigma \right) + \frac{\beta^2}{4} > 0 \quad (15)$$

(15) 式表明, 并不是所有由 (13) 式定义的周期响应都是稳定的。如果由 (14) 式能解出 3 个解, 则大解  $a_0 = a_M$  和小解  $a_0 = a_m$  都是稳定的, 而中间的那个解是不稳定的。这说明对于非线性系统 (12) 来说, 其受迫振动稳态解的振幅和频率与初始条件有关, 其振幅可具有多值性, 即在一定条件下同一干扰力频率对应着几个稳态周期运动, 物理上实现哪一个周期运动取决于初始条件。

下面讨论随机扰动 ( $\xi_1 \neq 0, \xi_2 \neq 0$ ) 对周期解的影响, 令

$$a = a_0 + a_1, \gamma = \gamma_0 + \gamma_1 \quad (16)$$

其中  $a_0, \gamma_0$  由 (13) 式定义,  $a_1, \gamma_1$  为摄动项。将 (16) 式代入 (9) 式忽略非线性项可得如下的线性化方程

$$x'(T_1) = Cx(T_1) + f(T_1) \quad (17)$$

$$\text{其中 } x(T_1) = \begin{pmatrix} x_1(T_1) \\ x_2(T_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1(T_1) \\ \gamma_1(T_1) \end{pmatrix}$$

$$f(T_1) = \begin{pmatrix} f_1(T_1) \\ f_2(T_1) \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix} \quad (18)$$

$$f_1(T_1) = \xi_1(T_1), f_2(T_1) = \xi_2(T_1) \quad (19)$$

$$c_1 = c_4 = -\frac{\beta}{2}, c_2 = \frac{3}{8}\alpha a_0^3 - \sigma a_0,$$

$$c_3 = \frac{\sigma}{a_0} - \frac{9}{8}\alpha a_0 \quad (20)$$

方程 (17) 可用模态分析法进行求解<sup>[12]</sup>。矩阵  $C$  的特征值和特征向量由式  $Cx = \lambda x$  给出, 而其对偶问题的特征向量由式  $C^T y = \lambda y$  给出。这样, 可算出模态矩阵为:

$$X = \begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 \\ \frac{\delta_1(\lambda_1 - c_1)}{c_2} & \frac{\delta_2(\lambda_2 - c_1)}{c_2} \end{pmatrix} \quad (21)$$

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{\lambda_1 - c_1}{c_3} & \frac{\lambda_2 - c_1}{c_3} \end{pmatrix}$$

式中  $\delta_n = \frac{c_2 c_3}{c_2 c_3 + (\lambda_n - c_1)^2}, n = 1, 2$ 。做变换  $x(T_1) = Xz(T_1)$ , 并左乘  $Y^T$  可将方程 (17) 转化为如下的非耦合方程

$$\begin{cases} z_1'(T_1) = \lambda_1 z_1(T_1) + g_1(T_1) \\ z_2'(T_1) = \lambda_2 z_2(T_1) + g_2(T_1) \end{cases} \quad (22)$$

$$\text{其中 } g_i(T_1) = \xi_i(T_1) + \frac{\lambda_i - c_1}{c_3} \xi_2(T_1) \quad (23)$$

由方程 (22) 可得解耦后的系统的响应为

$$\begin{cases} Ez_m = 0 \\ E[z_m(t_1)z_n(t_2)] = e^{(\lambda_m t_1 + \lambda_n t_2)} \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} e^{-(\lambda_m \tau_1 + \lambda_n \tau_2)} \cdot \\ E[g_m(\tau_1)g_n(\tau_2)] d\tau_1 d\tau_2, m, n = 1, 2 \end{cases} \quad (24)$$

结合 (2), (10), (23) 和 (24) 四式可得

$$\begin{cases} Ez_m = 0 \\ E[z_m z_n] = -\frac{\pi S_0}{\lambda_m + \lambda_n} \left[ 1 + \frac{(\lambda_m - c_1)(\lambda_n - c_1)}{\alpha_0^2 c_3^2} \right] \\ m, n = 1, 2 \end{cases} \quad (25)$$

## 1.2 $\Delta$ 不大时系统的响应

再考虑复杂的情形, 设  $\Delta$  不大即在稳态运动时系统发生碰撞。先考虑  $\xi(t) = 0$  即系统只受到

确定性谐和激励但  $\Delta$  不大, 即在稳态运动时系统发生碰撞的, 此时方程 (1) 变为

$$\begin{cases} \ddot{x} + \varepsilon \beta \dot{x} + x + \varepsilon \alpha_1 x^3 + \varepsilon \alpha_2 x^2 x = \bar{h} \cos \omega t, x < \Delta \\ \dot{x}_+ = -e \dot{x}_-, x = \Delta \end{cases} \quad (26)$$

其中  $\bar{h} = \varepsilon h$ 。由于  $\varepsilon$  是小参数, 可以先设  $\varepsilon = 0$ , 系统 (26) 变为

$$\begin{cases} \dot{x} + x = \bar{h} \cos \omega t, x < \Delta \\ \dot{x}_+ = -e \dot{x}_-, x = \Delta \end{cases} \quad (27)$$

碰撞系统 (27) 研究的比较成熟, 由文献 [1] 可以知道, 每过  $l \in \mathbb{Z}$  个激励周期系统发生一次碰撞的运动满足下面的条件:

$$\begin{cases} x(0) = \Delta, \dot{x}(0) = \dot{x}^+ \\ x(\frac{2\pi l}{\omega}) = \Delta, \dot{x}(\frac{2\pi l}{\omega}) = \dot{x}^- \end{cases} \quad (28)$$

式中  $\dot{x}, \dot{x}^+$  分别表示碰撞前后的质点速度,  $e = -\frac{\dot{x}^+}{\dot{x}^-}$  为恢复系数。可以求出满足条件 (28) 的解为

$$x(t) = x_0(t) = a_1 \cos(t - \frac{\pi l}{\omega}) + a_2 \cos(\omega t + \varphi) \quad (29)$$

其中  $a_1 = \frac{\Delta - a_2 \cos \varphi}{\cos(\pi l / \omega)}, a_2 = \frac{\bar{h}}{|1 - \omega^2|}$ 。且可以求得碰撞前的速度为

$$\dot{x}^- = \frac{[1 \pm \sqrt{1 - (1 - a_2^2 / \Delta^2)^2 (1 + B^2)}] \Delta}{(1 + B^2) D} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \text{其中 } B &= \frac{1}{\omega} \frac{1 - e}{1 + e} \tan \frac{\pi l}{\omega} \\ D &= -\frac{1}{2} (1 + e) \cot \frac{\pi l}{\omega} \end{aligned} \quad (31)$$

由 (30) 式可以知道, 在一定的参数区域内, 系统 (27) 可以有双解。下面我们用摄动法求解系统 (26) 的响应, 可以设系统 (26) 的解为

$$x(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) \quad (32)$$

式中  $x_0(t)$  由 (29) 确定,  $\varepsilon x_1(t)$  为小摄动项。将 (32) 代入 (26) 式, 比较两边  $\varepsilon$  一次方的系数, 可得

$$\dot{x}_1 + x_1 = -\beta \dot{x}_0 - \alpha_1 x_0^3 - \alpha_2 x_0^2 x_0 \quad (33)$$

将  $x_0(t)$  的表达式 (29) 代入 (33) 式, 并只保留频率为  $\frac{\omega}{2\pi}, \frac{1}{2\pi}$  的谐波项, 得

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 + x_1 &= k_1 \cos(t - \frac{\pi l}{\omega}) + k_2 \sin(t - \frac{\pi l}{\omega}) + \\ &k_3 \cos(\omega t + \varphi) + k_4 \sin(\omega t + \varphi) \end{aligned} \quad (34)$$

其中  $k_1 = -[\alpha_1 (\frac{3}{4} a_1^3 + \frac{3}{2} a_1 a_2^2) + \frac{3}{4} \alpha_2 a_1^3], k_2 = \beta a_1, k_3 = -[\alpha_1 (\frac{3}{4} a_1^3 + \frac{3}{2} a_1^2 a_2) + \frac{3}{4} \alpha_2 \omega^2 a_2^3], k_4 =$

$\beta\omega a_2$ 。方程 (34) 的通解为

$$x_1 = C_1 \cos t + C_2 \sin t + \frac{k_1}{2} t \sin(t - \frac{\pi l}{\omega}) - \frac{k_2}{2} t \cos(t - \frac{\pi l}{\omega}) + \frac{k_3}{1 - \omega^2} \cos(\omega t + \varphi) + \frac{k_4}{1 - \omega^2} \sin(\omega t + \varphi) \quad (35)$$

其中任意常数  $C_1, C_2$  可以由条件  $x_1(0) = 0, x_1(\frac{2\pi l}{\omega}) = 0$  确定。

然后我们考虑同时受到确定性谐和与随机激励的系统 (1), 可以设系统 (1) 的响应为

$$x(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \sqrt{\varepsilon} Y \quad (36)$$

其中  $x_0(t)$  和  $x_1(t)$  分别由 (29) 和 (35) 式定义,  $\sqrt{\varepsilon} Y$  是摄动项。将 (36) 式代入 (1) 式并忽略关于  $\varepsilon$  的高阶项可得如下线性化方程

$$\begin{aligned} \dot{Y} + \varepsilon [\beta + 2\alpha_2 \dot{x}_0(t)x_0(t)] \dot{Y} + \\ 3\alpha_1 x_0^2(t) Y + Y = \sqrt{\varepsilon} \xi(t) \end{aligned} \quad (37)$$

由于  $\varepsilon$  为小参数, 可用随机平均法<sup>[12]</sup> 求解系统 (37) 的稳态响应。引入变换

$$\begin{aligned} Y(t) = A(t) \cos \Phi, \dot{Y}(t) = -A(t) \sin \Phi \\ \Phi = t + \Theta \end{aligned} \quad (38)$$

并运用随机平均法可得相应的伊藤随机微分方程:

$$\begin{cases} dA = \left[ -\frac{\beta A}{2} \varepsilon + \frac{\pi S_0}{2A} \varepsilon \right] dt + \sqrt{\pi S_0} \sqrt{\varepsilon} dW_1(t) \\ d\Theta = \frac{3\alpha_1 (a_1^2 + a_2^2)}{4} \varepsilon dt + \frac{\sqrt{\pi S_0}}{A} \sqrt{\varepsilon} dW_2(t) \end{cases} \quad (39)$$

其中  $W_1(t), W_2(t)$  是独立的标准 Wiener 过程。

由 (39) 第一式不依赖于  $\Theta$  知,  $A(t)$  本身是一个时齐扩散过程, 其稳态概率密度  $p(a)$  由下面 FPK 方程支配

$$\frac{d}{da} \left[ \left( \frac{\beta a}{2} \varepsilon - \frac{\pi S_0}{2a} \varepsilon \right) p \right] + \frac{\pi S_0 \varepsilon}{2} \frac{d^2 p}{da^2} = 0 \quad (40)$$

从而可解得

$$p(a) = \frac{a}{\rho^2} \exp\left(-\frac{a^2}{2\rho^2}\right), \rho^2 = \frac{\pi S_0}{\beta} \quad (41)$$

由上式可得  $A(t)$  的一、二阶矩为:

$$\begin{aligned} EA(t) &= \int_0^{+\infty} a p(a) da = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \rho \\ EA^2(t) &= \int_0^{+\infty} a^2 p(a) da = 2\rho^2 \end{aligned} \quad (42)$$

## 2 数值模拟

有关随机过程数值模拟的方法可见文献 [12], 本文数值模拟中设  $\xi(t)$  的谱密度为

$$S(t) = \begin{cases} S_0, & 0 < t \leq 2\omega \\ 0, & t > 2\omega \end{cases}$$

则  $\xi(t)$  可取为如下形式<sup>[12]</sup>:

$$\xi(t) = \sqrt{\frac{4\omega S_0}{N}} \sum_{k=1}^N \cos\left[\frac{\omega}{N}(2k-1)t + \varphi_k\right]$$

式中  $\varphi_k$  是  $(0, 2\pi]$  上均匀分布的独立同分布随机变量序列,  $N$  是一个较大的整数。

在本文的数值模拟中, 取参数如下:

$$\alpha_1 = 0.09, \alpha_2 = 0.03, \beta = 0.3$$

$$h = 2, e = 0.8, \varepsilon = 0.1, N = 1000$$

在没有碰撞时, 用四阶龙格库特法可计算出的系统 (1) 的响应; 碰撞发生后, 只需根据公式  $x^+ = -ex^-$  将速度改变后再用龙格库特法进行计算。先考虑  $\Delta$  较大时的情形, 本文中先取  $\Delta = 6.0$ , 这时系统的稳态运动不发生碰撞。当  $\xi(t) = 0$  即系统只受确定性谐和激励时, 对应于不同的激励频率  $\omega = 1 + \varepsilon\sigma$ , 由 (14) 式给出的系统 (1) 响应的振幅  $a_0$  的理论值与数值计算值的比较见图 1。由图 1 可见, 理论解与数值解吻合得很好, 这说明用多尺度法求解方程 (1) 是有效的。

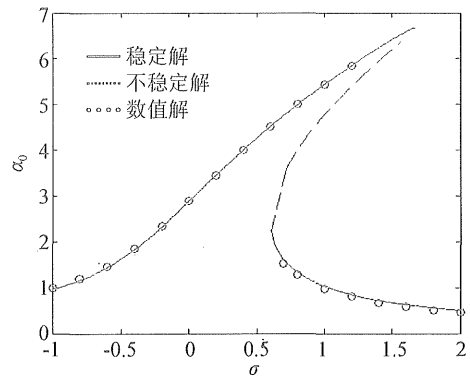


图 1 系统 (1) 频率响应曲线 ( $\Delta = 6.0, S_0 = 0.0$ )

Fig. 1 Frequency response of system (1)

下面研究随机扰动  $\xi(t)$  对系统响应的影响。取  $\sigma = 1.0$ , 此时系统 (12) 将有两个稳定的稳态解, 由 (14) 式可以解得这两个解分别为  $a_0 = a_m = 1.03$  和  $a_0 = a_M = 5.44$ , 即对于不同的初始值, 确定性系统 (12) 有两种不同的稳态响应。对于随机系统 (1), 也有类似的多值现象。当  $S_0 = 0.0025$ , 对应于不同的初值系统 (1) 响应的时间历程图和相轨图分别见图 2 和图 3。图 2 中的初值是  $x(0) = 5.0, \dot{x}(0) = 4.5$ , 图 3 中的初值是  $x(0) = 1.0, \dot{x}(0) = 1.5$ , 图中  $y(t) = \dot{x}(t)$  表示速度。

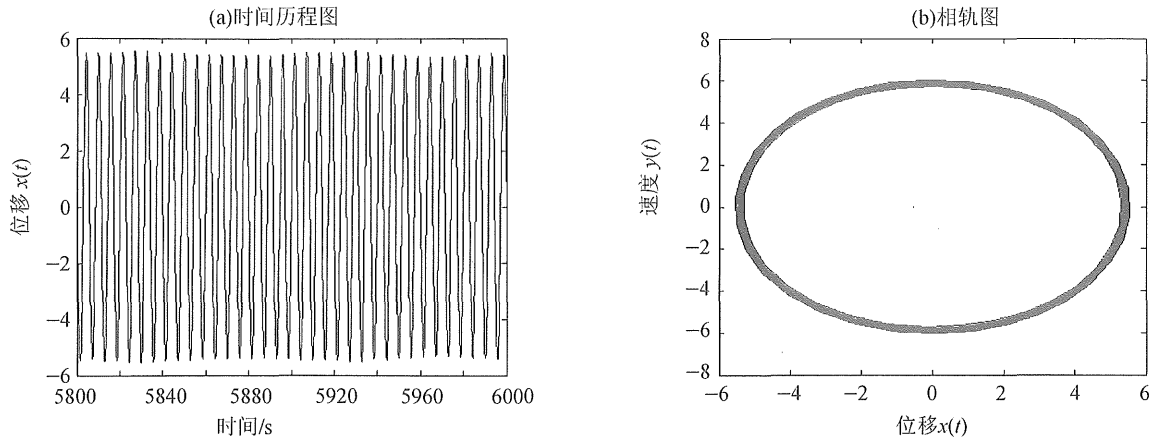


图 2 系统 (1) 的数值结果 ( $x(0) = -5.0, \dot{x}(0) = 4.5$ )

Fig. 2 Numerical results of equation

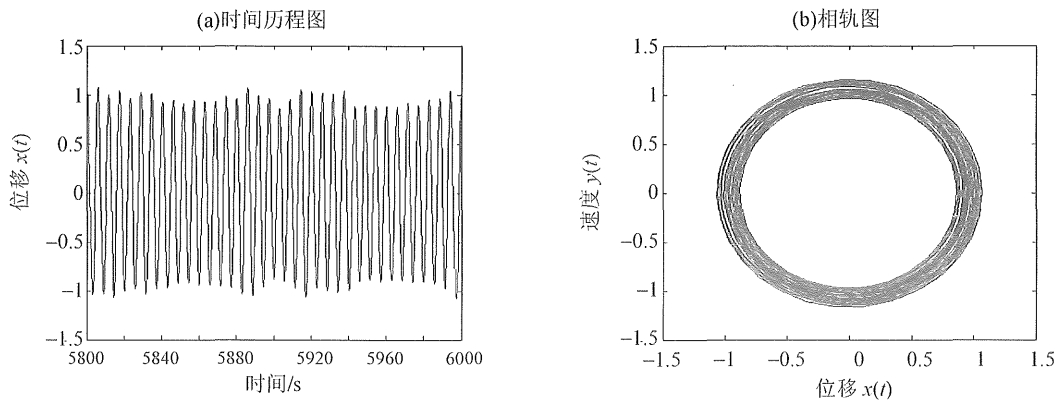


图 3 系统 (1) 的数值结果 ( $x(0) = 1.0, \dot{x}(0) = 1.5$ )

Fig. 3 Numerical results of equation (1)

由图 2、3 可见, 当随机扰动  $\xi(t)$  较小时, 对应于不同的初值系统 (1) 可有两个不同的稳态响应, 与前述理论分析的结果一致。由于随机扰动  $\xi(t)$  的存在, 系统响应从一周期解变为一拟周期解, 系统的相轨也从一极限环变为一扩散的极限环。计算表明, 随着  $\xi(t)$  的增大, 此扩散极限环的宽度将增大。当然, 由图 2 和图 3 表示的稳态解是系统 (1) 不发生碰撞时的解。当  $S_0 = 0.0025$ , 对应于不同的激励频率  $\omega$ , 系统 (1) 均方响应的理论值与数值解见图 4。

下面再研究当  $\Delta$  较小, 即系统的稳态响应发生碰撞时的情形。取  $\sigma = 1.0$ , 此时系统 (3) 将有两个稳定的稳态解, 由 (14) 式可以解得这两个解分别为  $a_0 = a_m = 1.03$  和  $a_0 = a_M = 5.44$ 。当约束距离  $\Delta < a_m$  时, 显然系统 (1) 的稳态响应不可

能是由 (11) 式表示的没有碰撞解, 而只能是由 (36) 式表示的有碰撞解。当  $\Delta = 0.6$  时, 由 (29), (32) 和 (35) 式得到的系统 (26) 理论解和数值解的比较见图 5, 由图 5 可见, 理论解与数值解吻合得很好, 说明用摄动法求解非线性碰撞系统 (26) 是有效的, 相应的时间历程的。

当  $a_m < \Delta < a_M$  时, 对于不同的初始值系统 (1) 可以有两个不同的稳态解, 即由 (11) 式确定的对应于  $a_0 = a_m$  小的没有碰撞的稳态解及对应于 (36) 有碰撞的稳态解。取  $\sigma = 1.0$ , 此时系统 (12) 将有两个稳定的稳态解, 由 (14) 式可以解得这两个解分别为  $a_0 = a_m = 1.03$  和  $a_0 = a_M = 5.44$ 。我们取  $\Delta = 2.5, S_0 = 0.0025$ , 对于不同的初始值, 系统 (1) 响应的时历程与相轨分别见图 6 和图 7。

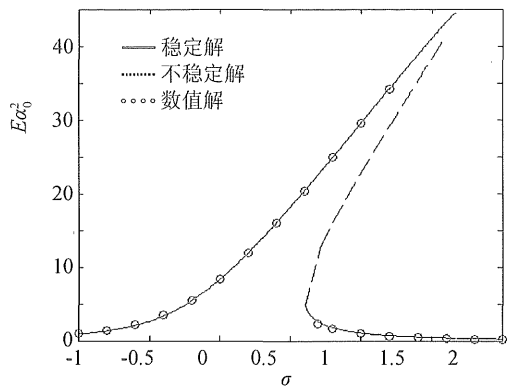


图 4 系统 (1) 频率响应曲线 ( $\Delta = 6.0, S_0 = 0.0025$ )

Fig. 4 Frequency response of system (1)

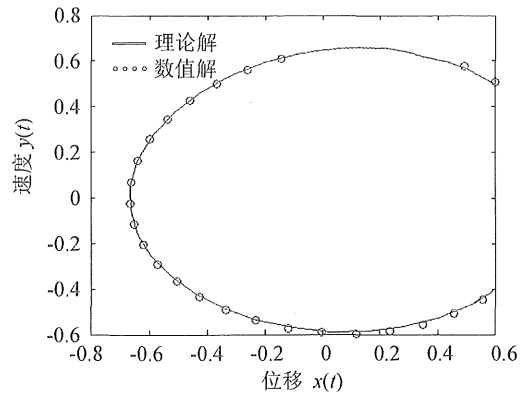


图 5 系统 (26) 响应相轨 ( $\Delta = 0.6$ )

Fig. 5 Numerical results of equation (26)

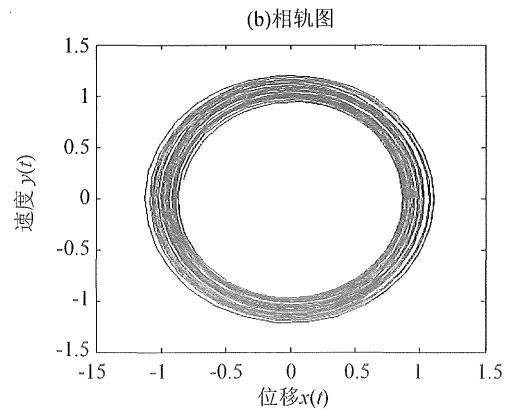
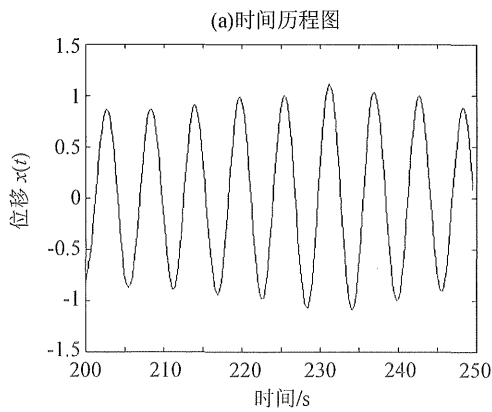


图 6 系统 (1) 的响应 ( $\Delta = 2.5, S_0 = 0.0025, x(0) = 0.5, \dot{x}(0) = 0.5$ )

Fig. 6 Numerical results of equation (1)

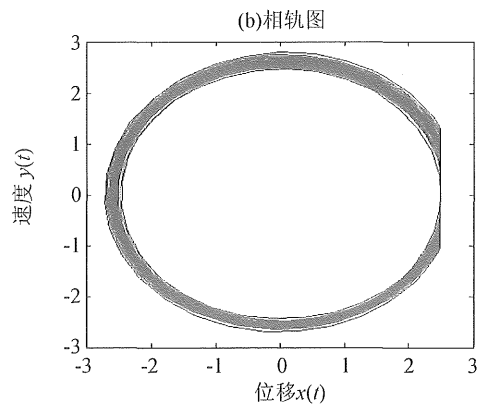
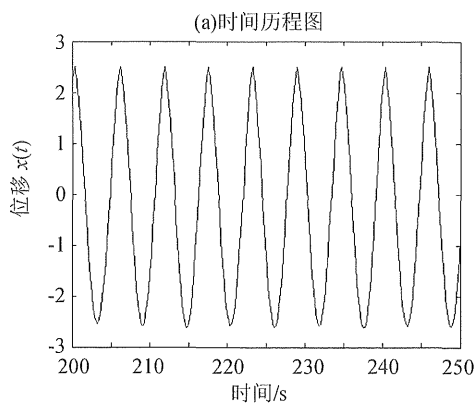


图 7 系统 (1) 的响应 ( $\Delta = 2.5, S_0 = 0.0025, x(0) = 5.0, \dot{x}(0) = -4.5$ )

Fig. 7 Numerical results of equation (1)

由图 6、7 可见, 当随机扰动  $\xi(t)$  较小时, 对应于不同的初值系统 (1) 可有两个不同的稳态响应, 图 7 代表的是由 (11) 式表示的没有碰撞的稳态解, 显然稳态解的最大振幅不超过约束距离  $\Delta = 2.5$ , 图 7 代表的是由 (36) 式表示的有碰撞的稳态解。这种不同初始条件下的双解现象是首次被

发现, 这也表明了碰撞系统的复杂性。随机扰动使得系统响应从一周期解变为一拟周期解, 相轨也从一极限环变为一个扩散的极限环。计算表明, 当噪声  $\xi(t)$  的强度  $S_0$  增大后, 不发生碰撞的稳态解将变得不稳定, 向发生碰撞的稳态解跃迁。其中迁移的详细过程, 可以用胞映射的方法进行研究, 这是我

们今后进一步研究的工作。

### 3 结论与讨论

本文将多尺度法引入非线性随机碰撞系统的响应分析中,并结合摄动法和随机平均法研究了碰撞系统在确定性谐和激励和随机激励联合作用下系统的响应。

理论分析和数值模拟表明,当随机扰动  $\xi(t)$  较小时,对应于不同的初值系统 (1) 可有两个不同的稳态响应,这两个稳态响应可以都不是碰撞的响应,也可以一个是碰撞的稳态响应,而另外一个是不碰撞的稳态响应,这种现象是首次被发现,也说明了碰撞系统的复杂性。当约束距离  $\Delta$  较大时,由于在稳态运动时系统不发生碰撞,系统 (1) 就成为在外力作用下的光滑 *der Pol-Duffing* 系统。而众所周知,在一定的参数范围内,对于不同的初始条件, *Duffing* 系统可以有两个不同的解,即系统有两个吸引子  $a_m$  和  $a_M$ , 每个吸引子都有自己的吸引域。当  $\Delta$  较小即  $\Delta < a_m$  时,稳态运动发生碰撞,显然系统不可能达到原来解  $a_m$  和  $a_M$ , 这时系统只有一个发生碰撞的稳态解,即系统只有一个吸引子。当  $a_m < \Delta < a_M$  时,显然系统不可能有稳态解  $a_M$ , 这时对于不同的初始值,系统可以有两个不同的稳态解,一个是不发生碰撞的稳态解  $a_m$ , 另外一个发生碰撞的稳态解,即系统有两个吸引子,每个吸引子都有自己的吸引域。要从物理上详细解析这些现象,需要用胞映射的方法研究参数变化时这些吸引子的变化情况,这是我们进一步要作的工作。本文所给的参数中,当  $\Delta < a_m$  时,系统只有一个发生碰撞的稳态解,当参数改变时,可能有多个稳态解,这也是我们进一步要作的工作。

#### 参考文献:

- [1] 金栋平,胡海岩. 碰撞振动与控制[M]. 北京:科学出版社,2005:1-50.  
 [2] 丁旺财,谢建华. 碰撞振动系统分岔与混沌的研究进

展[J]. 力学进展,2005,35:513-524.

DING W C, XIE J H, Advances of research on bifurcations and chaos in vibro-impact system[J]. Advances in Mechanics,2005,35:513-524.

- [3] DIMENTBERG M F, IOUTCHENKO D V. Towards incorporating impact losses into random vibration analyses: a model problem[J]. Probabilistic Engineering Mechanics,1999,14:323-328.  
 [4] DIMENTBERG M F, IOUTCHENKO D V. Random vibrations with impacts: A review[J]. Nonlinear Dynamics. 2004, 36:229-254.  
 [5] 冯进钤,徐伟,王蕊. 随机 *Duffing* 单边约束系统的倍周期分叉[J]. 物理学报,2006,55(11):5733-5739.  
 FENG J Q, XU W, WANG R. Period-doubling bifurcation of stochastic *Duffing* one-sided constraint system[J]. Acta Physica Sinica. 2006,55(11):5733-5739.  
 [6] RAJAN S, DAVIES H G. Multiple time scaling of the response of a *Duffing* oscillator to narrow-band excitations [J]. Journal of Sound and Vibration, 1988,123: 497-506.  
 [7] NAYFEH A H, SERHAN S J. Response statistics of nonlinear systems to combined deterministic and random excitations[J]. International Journal of Nonlinear Mechanics, 1990,25(5): 493-509.  
 [8] RONG H W, XU W, FANG T. Principal response of *Duffing* oscillator to combined deterministic and narrow-band random parametric excitation [J]. Journal of Sound and Vibration, 1998,210(4): 483-515.  
 [9] RONG H W, XU W, WANG X D. Response statistics of two-degree-of-freedom nonlinear system to narrow-band random excitation[J]. International Journal of Non-linear Mechanics, 2002,37(6): 1017-1028.  
 [10] NAYFEH A H. Introduction to Perturbation Techniques [M]. New York: Wiley, 1981.  
 [11] 周纪卿,朱因远. 非线性振动[M]. 西安:西安交通大学出版社,1998:30-60.  
 [12] 朱位秋. 随机振动[M]. 北京:科学出版社,1992:1-150..